Theorem 4.10 (Rekonstruktionssatz).

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t-mT)}{T}\right) \tag{4.90}$$

Die Funktion $\operatorname{sinc}(x)$ ist bekannt als Fouriertransformierte eines Rechteckfensters (dort wegen der Bandbeschränkung). Sie nimmt dabei den Wert 1 bei $x=0$ an und hat das in Abb. 4.11 gezeigte Aussehen. Insbesondere bei $x(t)=1$ für alle t erhalten wir aus dem Rekonstruktionssatz für alle t die Beziehung

$$1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t-mT)}{T}\right) \tag{4.91}$$

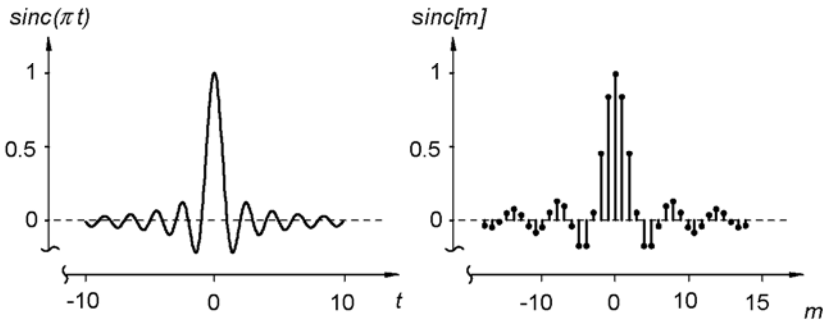

Abbildung 4.11. Verlauf der Funktion $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$

Wir erkennen daraus anschaulich, dass eine Überlagerung unendlich vieler sinc-Funktionen, zentriert zu beliebigen Zeitpunkten t, eine Konstante ergibt. So ist es verständlich, dass der Rekonstruktionssatz tatsächlich ein „glattes" Aussehen der ursprünglichen Funktion wieder herstellt.

Wir wollen uns an einem Beispiel überlegen, dass diese Rekonstruktion bei Einhaltung der Bandbeschränkung das richtige Resultat liefert bzw. sonst zu aliasing führt.

Beispiel 4.9 – Effekte des Aliasing.

Wir betrachten die abgetastete Folge $x[m] = \exp(j\,\nu\, mT)$ mit einer noch unbestimmten Frequenz ν. In der Integralformulierung des Rekonstruktionssatzes wird daraus eine kontinuierliche Funktion

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Omega}\int_{\omega=-\Omega/2}^{\Omega/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-jm\omega T} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\Omega}\int_{\omega=-\Omega/2}^{\Omega/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm(v-\omega)T} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$