man z als komplexe Zahl auf, kann der Konvergenzbereich (**ROC** - region of convergence) anschaulich in einem zweidimensionalen Diagramm, der sog. z-Ebene, dargestellt werden. Nur mit Angabe des Konvergenzbereiches ist die Z-Transformation eindeutig, siehe Beispiel 3.5 auf der nächsten Seite. Welche Bedeutung die Konvergenz bei der Verwendung der Z-Transformation für die Digitale Signalverarbeitung hat, wird weiter unten erläutert.

Zur Frage der Konvergenz stellen wir zunächst fest, dass Geichung (3.16) die Laurent-Reihe (Bronstein u. a., 1999) von $F(z)$ ist. Diese konvergiert, wenn der reguläre Teil $F_{\text{reg}}(z)$ und der Hauptteil $F_{\text{haupt}}(z)$ konvergieren.

$$F_{\text{reg}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(-n) z^{n} \tag{3.22}$$

$$F_{\text{haupt}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{-n} \tag{3.23}$$

Stellt man das Konvergenzgebiet der Laurent-Reihe in der z-Ebene dar, so wird es durch maximal zwei Kreise mit den Radien r_{reg} bzw. r_{haupt} um den Ursprung der z-Ebene begrenzt; das Konvergenzgebiet liegt innerhalb des Kreises mit dem Radius

$$r_{\text{reg}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup |f(-n)|^{1/n}} \tag{3.24}$$

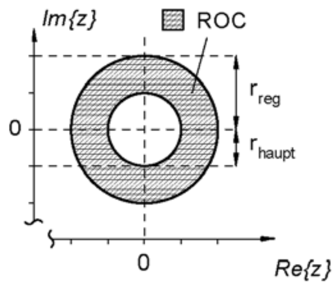

Abbildung 3.1. Konvergenzgebiet der Laurent-Reihe

und außerhalb des Kreises mit dem Radius

$$r_{\text{haupt}} = \lim_{n\to\infty} \sup |f(n)|^{1/n} \tag{3.25}$$

Es gilt also:

$$r_{\text{haupt}} < |z| < r_{\text{reg}} \tag{3.26}$$

Beispiel 3.4 – Konvergenz der Z-Transformation.

Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der reellen kausalen Exponentialfolge $f(n) = a^n$ für $n > 0$, $f(n) = 0$ sonst